



## 4 – Cahier des exigences d’une axiomatisation des notions spatiotemporelles

Jean Stratonovitch

### ► To cite this version:

Jean Stratonovitch. 4 – Cahier des exigences d’une axiomatisation des notions spatiotemporelles. 2014. hal-00993981

**HAL Id: hal-00993981**

**<https://hal.science/hal-00993981>**

Preprint submitted on 20 May 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Cahier des exigences d'une axiomatisation des notions spatiotemporelles

Jean Stratonovitch

Si l'espace et le temps étaient des notions qui vont de soi, nous croirions encore à l'immobilité absolue du plancher des vaches, et nous nous représenterions encore, comme les savants de l'Antiquité, l'univers sous la forme d'une boule fermée par la sphère des fixes, au-delà de laquelle il n'y a rien, même pas d'espace – celui-ci n'a commencé à se chosifier qu'aux temps modernes, avec son assimilation cartésienne à un système de coordonnées. Quant au temps, nous le croirions peut-être cyclique, avec un bon argument pour cela, que le cours des planètes gouverne le monde, et que, puisqu'elles tournent régulièrement, enchâssées sur leurs sphères de cristal, elles ne peuvent manquer de reproduire tôt ou tard les mêmes configurations, et donc le même monde.

L'argument n'est à vrai dire pas tout à fait correct, il ne fonctionne qu'avec des durées dont les rapports sont rationnels, mais ce sont les seuls nombres dont nous disposions à l'époque.

Quelle que soit la part préconstruite en nous de l'espace et du temps, en tant que *catégories a priori de l'entendement*, ces notions n'en sont pas moins sujettes à révolution copernicienne, galiléenne, newtonienne ou einsteinienne, ce sont donc aussi des notions *construites*, avec plus ou moins de rigueur, de pertinence, de naïveté ou de négligence.

Ce sont aussi des notions cruciales. Il est impossible de trouver la moindre expérience de physique dans laquelle elles n'interviennent pas. Aussi, la question de leur construction la plus solide possible vaut sans doute la peine d'être étudiée attentivement.

## 1 – L'IMMERSION DANS LA PEAU D'UN HOMME PRÉHISTORIQUE

On ne comprend véritablement une construction que quand on la refait soi-même pas à pas. Et pour cela, il faut se débarrasser du déjà construit.

Nous devons donc commencer par jeter par-dessus bord toute conception élaborée de l'espace et du temps, qu'elle nous vienne du sens commun, d'Aristote, de Newton, de Leibniz, de Kant, d'Einstein ou de Bergson.

Nous nous plaçons donc devant les notions spatiotemporelles dans un état d'ignorance idéale semblable à celle d'un « homme préhistorique parfait », de même puissance intellectuelle que l'homo sapiens actuel, mais qui n'a pas encore acquis ces notions, du moins pas comme nous l'avons fait, nous qui modélisons les longueurs et les durées avec des nombres « réels » – ces abstractions tellement sophistiquées qu'il faut une infinité de décimales pour les écrire. Aucun instrument de mesure de l'espace ou du temps n'existe dans le monde brut où nous plonge la nécessité philosophique de la table rase, ni règle, ni équerre, ni rapporteur ni horloge, sans parler des merveilles technologiques dont nous disposons aujourd'hui, il n'y a que des cailloux irréguliers et des bouts de bois tordus.

En même temps, bien sûr, que nous avons tout oublié de nos savantes notions spatiotemporelles et perdu tous nos instruments, nous en gardons le souvenir. De même que nous conservons notre « honnête connaissance » des mathématiques et de la physique d'aujourd'hui. L'exercice de la table rase est forcément – aussi – un exercice de schizophrénie.

.....

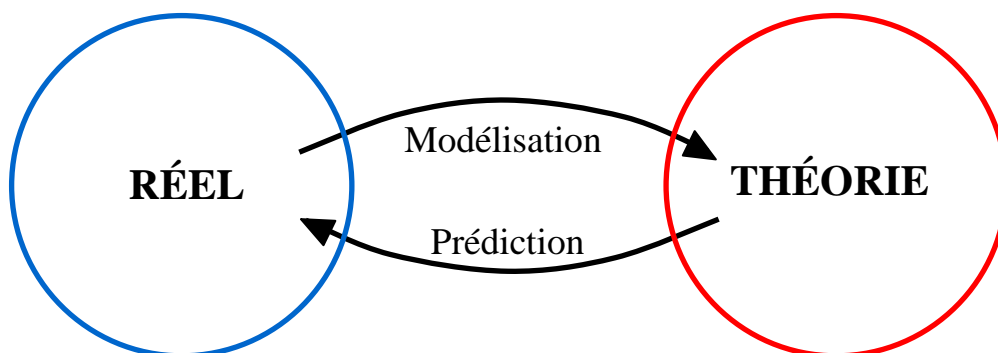
## 2 – LE MODÈLE RÉEL / THÉORIE

Ce que nous entendons faire, dans notre peau d'homme préhistorique, c'est construire une théorie de l'espace et du temps.

Donnons-lui un nom. Nous appellerons **cinématique** cette partie de la physique vouée à la construction des notions spatiotemporelles. Le mot, créé par Ampère au début du dix-neuvième siècle, désigne l'étude du mouvement dans un cadre

achevé d'espace et de temps ; nous lui donnons donc ici une signification différente.

De façon schématique – mais peut-être, justement, un peu trop schématique – ce que nous attendons d'une théorie peut se représenter ainsi :



La théorie est capable de décrire le réel. C'est la flèche « modélisation ». À partir de la description qu'elle fait de telle ou telle situation, par une « cuisine » interne, faite « hors du réel », elle fabrique des assertions quant à la situation considérée, qui peuvent être confrontées à la réalité. C'est la flèche « prédictions ».

.....

### 3 – LE RAPPORT AU RÉEL

Deux conceptions divergentes sont possibles. On peut accepter l'existence d'une réalité objective, extérieure, pourrait-on dire, à celui qui observe ; ou bien penser que la réalité n'existe qu'inséparablement de l'esprit de l'observateur. Selon la terminologie marxiste entendue dans ma jeunesse, ces deux points de vue sont ceux du matérialisme et de l'idéalisme.

La position matérialiste, telle qu'elle est souvent présentée, se prolonge volontiers par un petit tour de passe-passe. De la prémisse, l'existence d'une réalité objective, on glisse à la conclusion que la pensée est un phénomène purement matériel. Le lien est loin d'être évident, et c'est en fait un deuxième axiome. Affinons notre vocabulaire en appelant *matérialistes* les théories qui postulent les deux et *réalistes* celles qui se limitent au premier.

L'idée qu'une physique doive être réaliste paraît incontournable. On voit mal, par exemple, comment les squelettes de dinosaures qu'on retrouve dans des couches sédimentaires pourraient ne pas correspondre à une réalité ayant existé préalablement à nous, et donc autrement qu'au travers notre esprit.

D'un autre côté, il y a quelque chose d'indiscutablement vrai dans l'affirmation idéaliste que la réalité n'existe qu'à travers l'esprit de celui qui l'observe. Cette forme d'existence n'est pas de même nature que la précédente. De l'une à l'autre il y a glissement de sens. Peut-être devrions-nous là aussi affiner notre vocabulaire. Employer par exemple au lieu du mot « exister » la locution « être appréhendé ». Mais elle non plus ne serait pas satisfaisante. Elle ne dit pas en effet ce que cette appréhension peut avoir de sélectif, ne retenant qu'un aspect partiel du réel. Imaginons qu'il soit un lac, dans lequel nous pêchons avec une épuisette percée ne laissant pas entrer les poissons dont le diamètre est supérieur à onze centimètres, et laissant ressortir ceux dont le diamètre est inférieur à neuf centimètres. Nous serons persuadés à tort que tous les poissons ont dix centimètres de diamètre. En outre, l'aspect sélectif peut se doubler d'un aspect perturbateur. Les poissons peuvent mourir dès qu'ils touchent l'épuisette, ou bien se changer en quelque chose de radicalement différent, et nous n'avons pas la moindre idée de ce qu'ils sont quand nous ne les attrapons pas – peut-être de magnifiques sirènes aux cheveux blonds.

Des idées de cette sorte, à l'allégorie près, sont aujourd'hui banales en physique. L'acte d'observation n'est pas sans effet sur la chose observée, et la question de savoir ce qu'elle est « en réalité », lorsque nous ne l'observons pas, n'a dans certaines circonstances guère de sens – si ce n'est aucun.

En somme, la physique doit être réaliste, évidemment. Mais à condition de ne jamais perdre de vue que la réalité n'est pas comme la vérité sortant toute nue du puits, immédiatement offerte aux regards. *Elle ne s'appréhende qu'au travers d'expériences qui, d'une façon essentielle, sont indissociables de ce que nous atteignons d'elle.*

.....

## 4 – L'EXIGENCE DE FONDATION SUR L'INSTRUMENT ET L'EXPÉRIENCE

La prise de conscience de ce que le réel n'est pas un simple objet étalé devant nous, directement et complètement observable « objectivement », sans distorsion aucune, et surtout pas d'ordre essentiel, est devenue massive au vingtième siècle avec l'apparition de la physique quantique.

Mais la question, pour autant, non seulement n'est pas confinée au monde quantique, mais encore n'était pas nouvelle. Elle est au cœur de la divergence entre Newton et Leibniz quant à l'appréciation de ce qui, dans l'espace et dans le temps, « existe » ou « n'existe pas ». Le premier croyait à l'existence d'un espace absolu, assimilable à une sorte de « substance » universelle, intemporelle et parfaite, persistant identique à elle-même indépendamment de tout lien avec la réalité matérielle ; tandis que le deuxième n'acceptait l'espace – et de même le temps – qu'en tant qu'entités relatives, engendrées par les relations entre les objets matériels qui coexistent.

Einstein, deux siècles plus tard, s'opposant à Newton, se borne lui aussi à postuler l'existence d'un espace purement relatif. Dans *La relativité*, pour désigner la position d'un nuage (implicitement supposé ponctuel ; aujourd'hui il considérerait sans doute un hélicoptère en vol stationnaire) au-dessus de la place du Panthéon, il dresse dans un premier temps une longue perche verticalement, dont un des points coïncide avec le nuage ; ce point, joint à l'indication du lieu au sol, fournit une indication parfaite de la position du nuage. Dans un deuxième temps, il dit que la désignation fonctionne encore en imaginant seulement que la perche soit dressée en ce lieu, et en se contentant de dire que le nuage coïnciderait alors avec tel ou tel de ses points. L'espace est de ce point de vue l'ensemble des extensions rigides virtuelles de Terre ; et chaque corps au repos galiléen engendre le sien (on néglige ici le mouvement de rotation de la Terre).

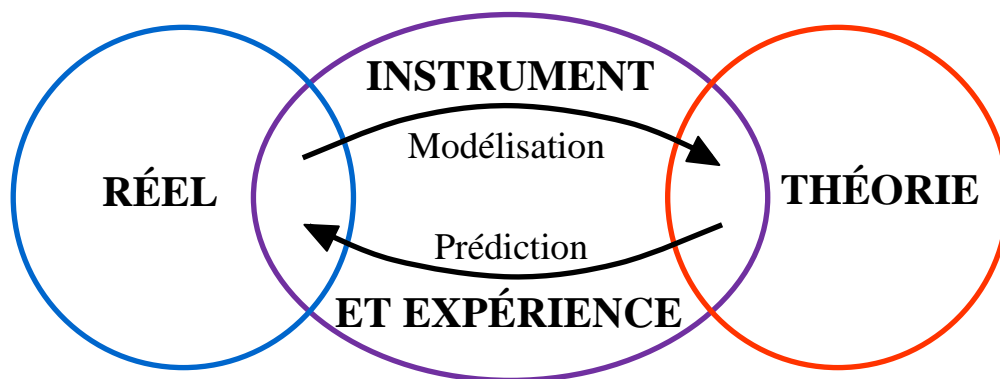
De façon analogue, en ce qui concerne le temps, Newton le voit comme absolu, coulant uniformément, rivière à la fois réelle et suspendue hors du réel concret, dont le cours remplirait l'univers et dont le flux serait parfaitement constant, tandis qu'Einstein se

contente de postuler que c'est tout simplement ce qu'on lit sur une horloge.

L'espace et le temps newtoniens, divinement parfaits et hors de portée de l'expérience, sont des objets à proprement parler métaphysiques, et qui donc ne concernent pas la physique. Ils sont de magnifiques sirènes aux cheveux blonds dont l'existence effective peut à juste titre nous laisser perplexe. La relativité restreinte les remplace par des « objets » directement construits sur l'expérience, et qu'il est bien difficile, dans la perspective newtonienne, de rejeter ; car en fin de compte, pour désigner effectivement un point dans l'espace, Newton n'a d'autre choix que d'employer le procédé d'Einstein ou un procédé similaire, de même que pour connaître une durée il lui faut bien, comme Einstein, lire l'indication que donne une horloge. Ce à quoi ce dernier se cantonne, c'est ce sur l'existence de quoi tout le monde est forcé d'être d'accord, les règles à mesurer et les horloges. Tout le reste est affaire de métaphysique.

L'espace et le temps ne peuvent et ne doivent être rien d'autre, pour le physicien, que ce qu'il peut en appréhender par ses instruments et ses expériences. Ils forment entre le réel et le modèle une interface cruciale sur laquelle il est impossible de faire l'impasse, et qui doit au contraire être pleinement explicitée et théorisée.

Le modèle usuel Réel / Théorie, parce qu'il ignore cette nécessité, et considère en conséquence la réalité comme indépendante des moyens que nous avons de l'atteindre, est un modèle insuffisant, naïf, philosophiquement insoutenable. Il doit être remplacé par un modèle fondé sur l'instrument et l'expérience, dans lequel ces derniers sont théorisés ainsi que les lois physiques en vertu desquels ils remplissent leur rôle.



Einstein, nous venons de le voir, appuie la relativité restreinte sur l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience.

Néanmoins, aux yeux des hommes préhistoriques que nous sommes, les informations qu'il nous apporte ne sont pas suffisantes.

Pour ce qui est de la construction de l'espace, des belles longues perches, que nous imaginons bien droites, en théorie parfaites, nous n'en avons pas. Pas plus que nous n'avons de règle à mesurer, d'équerre ou de rapporteur. Du coup, nous ne savons pas très bien ce que sont une droite, une distance, un angle. Nous le savons certes un peu, mais de façon intuitive et sommaire, non appuyée sur un instrument. Et nous ne connaissons pas les algorithmes qui nous permettraient d'en construire à partir des matériaux bruts, tordus, irréguliers dont nous disposons.

Pour ce qui est de la construction du temps, c'est pire. Car Einstein ne nous donne aucun renseignement sur ce qu'est une horloge. Nous arrivons à nous faire une idée de ce que sont ses belles perches bien droites, mais pour l'horloge, nous n'avons strictement rien à nous mettre sous l'imaginaire. De plus, il est patent, à le lire, qu'il la traite comme un objet idéalement ponctuel, ce qui nous déconcerte, primitifs que nous sommes, qui voudraient construire le temps *en toute rigueur*, et qui n'arrivent pas à comprendre comment un instrument *strictement ponctuel* peut inclure un quelconque mécanisme capable de délivrer un temps régulier.

Est-il possible de mesurer le temps sans le spatialiser en aucune manière ?
---

.....

## 5 - L'EXIGENCE DE BONNE ARCHITECTURE MATHÉMATIQUE

Nous disions plus haut que la théorie, à partir de la modélisation de telle ou telle situation est capable de fabriquer, par une « cuisine » interne faite « hors du réel », des assertions qui pourront être confrontées au réel.

Le mot « cuisine » n'est peut-être pas très heureux. Les assertions doivent résulter d'un processus déductif rigoureux, ne



laissant place ni à la libre interprétation ni au symbolisme fortuit : la cinématique doit être une théorie mathématique.

Nous exigeons d'elle la plus grande solidité possible, et la question est de savoir comment atteindre ce but. Il se trouve pour notre bonheur que les mathématiciens, au terme de deux millénaires de confrontation avec ce problème, ont réussi à très largement le résoudre.

Une première réponse a été donnée dès l'Antiquité. À cette époque, deux conceptions différentes se sont opposées. Il y a eu d'une part ce qu'on appelle les mathématiques « babyloniennes » – qui n'ont pas seulement eu cours en Babylonie. Selon elles, les mathématiques sont essentiellement une collection d'algorithmes permettant de résoudre certains problèmes. La question de savoir pourquoi ils atteignent leur but ne semble pas se poser : on sait qu'ils fonctionnent, et voilà tout.

Il y a eu d'autre part les mathématiques grecques – qui n'ont émergé que dans le monde grec. Elles sont construites autour d'une notion absente chez les babyloniennes, celle de démonstration. Il en résulte qu'elles sont structurées par une double hiérarchisation, dont la raison d'être est d'éviter toute circularité. En effet, quand on définit A à partir de B et B à partir de A, on n'a rien défini du tout ; d'où la hiérarchie des objets manipulés, qui peuvent être premiers, comme les nombres entiers, les points, les distances et les droites, ou bien logiquement définissables à partir des objets premiers, comme les hyperboles, les paraboles et les ellipses. De même, si pour prouver l'énoncé A, on utilise l'énoncé B, qui a lui-même été prouvé grâce à l'énoncé A, ni A ni B ne sont prouvés ; d'où la hiérarchie des énoncés, qui peuvent être premiers, et sont alors des axiomes, ou démontrables à partir d'eux, et sont alors des théorèmes.

Aucun « objet volant non identifié » ne doit exister. Tous les objets manipulés doivent être soit premiers soit logiquement définis à partir d'eux, et tous les énoncés considérés comme vrais doivent être des axiomes ou des théorèmes : la théorie doit être complètement explicitée.

De mathématiques ainsi structurées, nous disons qu'elles sont **axiomatisées**.

Quelques nuances manquent à cette description faite à traits un peu gros. Les mathématiques grecques n'étaient pas toujours conformes à leur ambition : à côté des axiomes explicites figuraient des axiomes tacites, tellement évidents aux yeux des mathématiciens de l'époque qu'ils n'acquerraient même pas le statut d'axiomes ; par exemple ceux décrivant l'ordre des points sur une droite. Quant aux mathématiques babyloniennes, elles ne pouvaient pas ignorer complètement le concept de preuve, au moins sous une forme embryonnaire, ressortissant plus de la vérification que de l'activité correctement conduite sur le plan de la logique.

Une autre précision à apporter est que si ces deux grandes directions s'opposent, c'est essentiellement parce qu'elles correspondent à deux stades successifs des mathématiques, qui commencent par être babyloniennes avant d'être grecques. Les premières, d'ailleurs, restent très rudimentaires devant les deuxièmes. On le comprend. Des mathématiques où l'on ne démontre pas demeurent nécessairement empiriques et ne peuvent aller bien loin. Lorsque les énoncés de base sont encore dans les limbes, et que les enchaînements logiques sont précaires, les assertions se perdent vite dans le flou, comme les objets même proches un jour de brouillard. Pour en sortir, il faut utiliser toute la solidité du raisonnement déductif, et elle ne peut se déployer qu'en posant à plat les règles du jeu, c'est-à-dire les lois de la logique, les objets premiers et les axiomes. C'est d'ailleurs – évidemment – ainsi que sont aujourd'hui construites toutes les mathématiques.

.....

## 6 – ÉLARGISSEMENT DU PROBLÈME : LE SIXIÈME PROBLÈME DE HILBERT

Les instruments et les expériences sur lesquels nous construisons la cinématique sont des instruments et des expériences de physique parmi les autres, même s'ils jouent un rôle particulier de par la position centrale en physique des concepts spatiotemporels. Lorsque nous voudrions introduire par exemple les notions de masse ou de force, il faudra aussi définir le ou les instruments nécessaires. Le problème sur lequel nous nous penchons n'est ainsi qu'une partie d'un plus grand : *dégager et construire, en partant de ce dont nous*

*disposons dans le monde brut de l'homme préhistorique, une suite d'instruments et d'expériences dont les propriétés, exprimées sous forme mathématique, c'est-à-dire sous la forme de théories axiomatisées, engendrent un modèle pertinent du réel physique.*

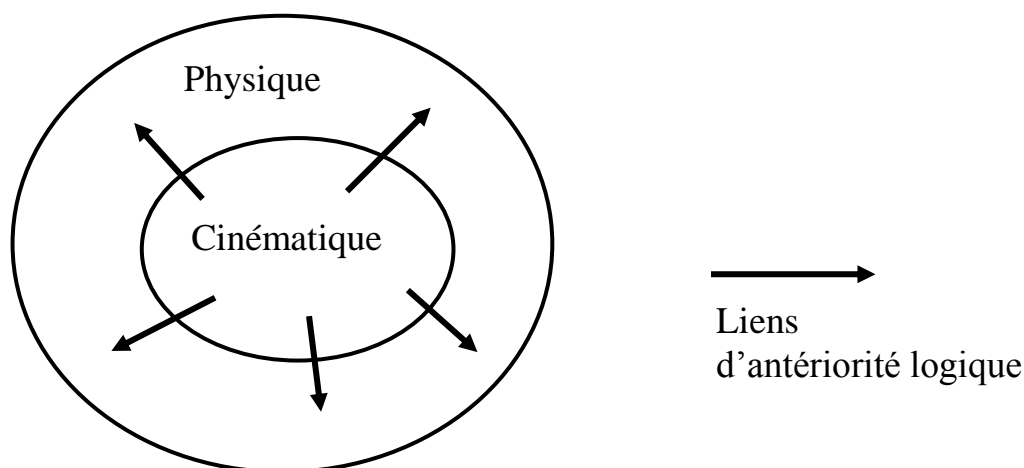
Ce problème est celui de l'axiomatisation de la physique. Il a été posé – quoique sous une forme différente, où n'apparaît pas l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience – par Hilbert en 1900 et a rapidement été abandonné. Aujourd'hui, il est presque unanimement considéré comme obsolète. On peut croire que c'est dommage, et qu'il mérite au contraire qu'on s'y intéresse, pour peu qu'on l'aborde sous le bon angle.

Il est vrai que le problème, posé brut, est pour le moins effrayant. À le prendre au pied de la lettre, il paraît réclamer non seulement la connaissance complète de toutes les lois de base du monde physique, dont nous ne disposons sans doute encore pas, mais encore de hiérarchiser ce territoire – ou plutôt cette mosaïque de territoires – en définissant des objets premiers – mais lesquels ? l'espace, le temps, l'espace-temps, le point, l'instant, les longueurs, les durées, les coordonnées, la métrique, les géodésiques, la masse, la matière, la quantité de mouvement, la force, l'énergie, l'entropie, la lumière, le photon, la particule en général, l'onde en général, chaque particule en particulier, même celles qu'on n'a pas découvertes, la charge, les champs, les interactions faibles ou fortes, le spin, l'étrangeté, les cordes, les super-cordes, etc., etc. ? La liste des objets premiers envisageables est à elle seule un vrai catalogue, voire un inventaire à la Prévert. Comme le nombre des axiomes possibles est forcément démesuré relativement à elle, le problème est un océan relativement auquel chaque tentative est une goutte d'eau.

D'ailleurs Hilbert ne l'a pas proposé sous sa forme la plus générale, mais (provisoirement, peut-on croire) limité à des domaines comme la mécanique, la théorie des probabilités et la théorie cinétique des gaz.

Néanmoins, tous ces objets premiers envisageables, dont nous n'avons entrevu qu'un bout de la liste, ont en commun d'être considérés sans lien aucun avec les expériences qui nous permettent de les atteindre. Dès lors qu'on pose l'exigence de fondation sur l'instrument et l'expérience, le chemin devient quasiment univoque, au moins dans ses premiers développements : puisque toutes les

expériences de physique invoquent des notions d'espace et de temps, celles-ci devront être mises en place avant les autres, et les premiers instruments à définir – les premiers objets premiers – sont les instruments de la géométrie et de la chronométrie. Autrement dit, dans une perspective axiomatique fondée sur l'instrument et l'expérience, la cinématique est le **noyau** de la physique.



La géométrie, considérée dans sa vocation première, a pour objet un certain aspect de la réalité matérielle, dont elle s'applique à formuler les lois. Elle devrait donc faire partie de la physique. Ce n'est pourtant pas le cas puisqu'on la range dans les mathématiques.

Ce n'est pas un exemple isolé. Les fondements de la notion de nombre sont dans le dénombrement des collections et dans la mesure des grandeurs, et l'arithmétique pourrait être considérée comme faisant partie de la physique, alors qu'on la range dans les mathématiques. On pourrait dire la même chose de la cinématique (au sens donné par Ampère), de la mécanique, du calcul des probabilités, disciplines nées de la confrontation avec la réalité, et donc sur les terres de la physique, mais qui font maintenant partie des mathématiques.

La raison de ces changements de tutelle est toute simple : dès que les lois régissant un domaine ont été dégagées avec une précision et une exactitude suffisantes, comme c'est le cas dans ces exemples, elles fournissent un modèle qui n'est rien d'autre qu'une théorie mathématique. Le recours à l'expérience se renverse alors. Elle cesse

d'être l'outil crucial par lequel nous apprenons quelque chose d'essentiel sur le réel pour devenir – comme c'est si flagrant en géométrie – relativement accessoire, un moyen empirique et de bas niveau de vérifier que les raisonnements et les calculs ont été correctement conduits.

Autant qu'elle le peut, la physique va vers la mathématisation. C'est-à-dire, en fin de compte, vers l'axiomatisation. Mais ce but est aujourd'hui loin d'être atteint. Lorsque Hilbert, en 1900, en a fait le sixième item de sa célèbre liste de problèmes ouverts, la physique triomphante, éblouie par toutes les merveilles qu'elle venait de découvrir et de formaliser, pouvait facilement se croire à la veille d'atteindre le graal de la connaissance parfaite de tout. Encore quelques détails à connaître, pensait-on volontiers, et la physique serait achevée. L'inventaire de ses lois fondamentales était pour ainsi dire fait, le physicien pouvait commencer à laisser la place au mathématicien. Ce qu'est Hilbert, qui considère ce problème comme un problème de mathématiques, le range avec d'autres problèmes de mathématiques, qu'il soumet à un congrès de mathématiciens. En outre, il vient de terminer son ouvrage *Les fondements de la géométrie*, dans lequel, plus de deux mille ans après Euclide, il propose la première axiomatisation aboutie de la géométrie, en ce sens que tous les axiomes traditionnellement oubliés, comme ceux régissant l'ordre des points sur une droite ou le partage du plan en deux demi-plans par une droite, sont explicités. Le sixième problème de Hilbert s'inscrit dans le prolongement de cette axiomatisation réussie : en faire autant avec la physique, ou au moins de larges pans d'elle.

Mais en quelques années, cette physique, qui croyait avoir tout compris ou presque, découvre la radioactivité, le résultat inattendu de l'expérience de Michelson et Morley, les débuts de la physique quantique, et commence à mesurer, alors qu'elle vient d'apprendre plus que jamais, toute l'étendue de son ignorance. Le difficile problème de l'axiomatisation de la physique devient un problème désuet, coloré de la naïveté des temps révolus, renvoyé aux calendes grecques, au jour en tout cas où la physique aura pour de bon cette connaissance totale de ses lois dont elle se croyait si proche à la fin du dix-neuvième siècle.

C'est un excès qui en remplace un autre. L'inachèvement des connaissances rend évidemment futile le projet d'axiomatiser la

physique dans sa totalité. Mais le travail d'axiomatisation en physique, commencé depuis plus de deux millénaires avec l'arithmétique et la géométrie, n'a jamais attendu l'achèvement des connaissances pour se faire. Il est consubstantiel à la physique, il ne peut avoir aujourd'hui perdu tout intérêt.

.....

## 7 – L'EXIGENCE D'UNIVERSALITÉ

Les résultats d'une expérience dépendent a priori des conditions dans lesquelles on la mène. Rien ne nous garantit, par exemple, que nos horloges délivrent le même temps loin de tout corps massif ou bien à proximité de l'un d'eux. La relativité générale prédit le contraire, et l'expérience lui donne raison sur ce point.

L'idée de construire d'emblée une cinématique dépendant des champs de pesanteur peut nous tenter un instant ; mais les champs de pesanteur, pour être installés, nécessitent une définition de la masse, à la fois gravitationnelle et inertielle, et l'une et l'autre ne peuvent être installées qu'à condition de disposer déjà de notions spatiotemporelles : on tombe sur un cercle vicieux inacceptable dans une théorie mathématique correctement structurée.

Pour sortir de cette difficulté, il nous faut trouver un contexte de référence où les champs de pesanteur sont toujours les mêmes, et ce ne peut pas être à proximité d'un corps massif, puisque les masses des corps ne sont a priori jamais les mêmes, que nous ne savons pas encore les mesurer, et qu'en outre les champs de gravitation varient selon la distance au corps. Le seul contexte de référence que nous puissions trouver est celui de l'« infini » éloignement de tout corps massif, là où les champs de pesanteur disparaissent – ou du moins suffisamment pour que nous puissions les tenir pour nuls – c'est le « désert intersidéral ».

Certes, les corps massifs ne sont « infiniment éloignés » que par abus de langage. Si nous voulons que cet éloignement infini soit en toute rigueur exact, il faudrait faire disparaître tous les corps célestes – expérience de pensée radicalement décrochée de toute faisabilité, et qui, supprimant le Ciel lointain, effacerait du coup le degré zéro de rotation qui marque le contexte galiléen et montre que l'influence globale des corps célestes lointains ne peut être tenue

pour nulle. Nous devons nous contenter des déserts sidéraux effectifs, en postulant qu'ils offrent les uns et les autres des conditions cinématiques identiques, ce qui n'est sans doute pas *exactement* vrai, puisque le Ciel lointain n'y a sans doute pas *exactement* la même influence.

Du cadre universel parfait dont il nous faut postuler en théorie l'existence, nous ne trouverons jamais que des représentants imparfaits. Nous nous en consolerons en disant que c'est une propriété générale des objets macroscopiques idéaux, et que nous avons en l'occurrence de fortes raisons de croire que l'écart des propriétés spatiotemporelles entre un désert intersidéral et un autre est vertigineusement petit relativement à nos possibilités expérimentales de discernement.

Ainsi, après nous être changés en hommes préhistoriques, nous devons en outre devenir ermites du cosmos et partir avec nos cailloux irréguliers et nos bouts de bois tordus expérimenter au milieu d'un désert intersidéral, afin d'y construire la seule cinématique universelle possible, celle du contexte **plat**, qui dans un deuxième temps permettra de situer les cinématiques des contextes non plats par la façon dont elles s'en écartent. C'est exactement la démarche suivie par Einstein, qui construit la relativité restreinte avant la générale.

La vie n'est toutefois pas facile dans les déserts intersidéraux, et l'entreprise serait désespérée si nous devions la réaliser autrement que par la pensée, et si nous ne savions, par des indices nombreux et concordants, que les notions spatiotemporelles du cadre plat ne diffèrent que d'une façon presque imperceptible de celles observées sur Terre.

.....

## 8 – L'EXIGENCE DE MINIMALITÉ

Elle est au cœur des mathématiques depuis qu'elles ont quitté le stade babylonien, même s'il lui est arrivé de subir quelques entorses. Sa première raison d'être est la prudence quant aux contradictions logiques qu'une théorie même correctement constituée

engendre parfois, et dont les effets sont catastrophiques, puisque elle devient alors capable de prouver tout et le contraire de tout.

On peut formuler ainsi cette exigence : des objets premiers, certes, puisque c'est inévitable, mais le moins possible ; et de même pour les axiomes. Moins les uns et les autres sont nombreux, en effet, moins ils ont de chance d'engendrer des conflits insoupçonnés.

C'est par exemple une recherche de minimalité que celle faite pendant des siècles pour savoir si l'énoncé affirmant l'existence et l'unicité de la parallèle en un point à une droite est un axiome, ou bien s'il est au contraire déductible des axiomes déjà posés.

C'est aussi une recherche de minimalité que celle qui a abouti à la construction des mathématiques tout entières à l'intérieur de la théorie des ensembles, et donc sur un plus petit système axiomatique possible.

Mais la recherche de minimalité n'est pas seulement guidée par un souci de prudence. En ramenant le champ complexe des énoncés vrais qu'une théorie produit aux conséquences d'un petit nombre d'éléments premiers, c'est aussi un travail de compréhension et d'explication qu'on effectue – et l'une et l'autre sont d'autant meilleures qu'est petit le nombre des éléments premiers.

Aussi voit-on la recherche de minimalité être de même une préoccupation centrale des physiciens. C'est elle qui guide la démarche d'Einstein lorsqu'il énonce son principe d'équivalence entre les champs de pesanteur et d'accélération. Ou bien encore elle qui pousse aujourd'hui à la recherche d'une unification des interactions élémentaires.

C'est pourquoi le principe de minimalité signe les grandes victoires explicatives de la physique. Il triomphe quand Newton montre que la Lune tombe vers la Terre exactement comme une pomme tombe vers elle, ou quand Mayer et Joule énoncent la loi d'équivalence du travail et de la chaleur, ou encore quand Maxwell ramène l'optique à l'électromagnétisme, ou encore quand la spatialisation de l'atome abolit en théorie la frontière entre chimie et physique en faisant découler les propriétés des éléments, jusque-là mystérieuses, de celles de leur structure électronique.

A contrario, le non-respect du principe de minimalité conduit souvent à mettre en place des chimères n'existant que dans notre imagination. Ainsi le Ciel des Anciens, avec ses lois différant de



celles du monde sublunaire, ou le phlogistique, cette « substance de la chaleur » qui était autre chose qu'une des formes de l'énergie, ou une lumière qui n'était pas un cas particulier d'onde électromagnétique.

.....

## 9 – L'EXIGENCE DE SOLIDITÉ LOGIQUE

Nous avons dit plus haut que les mathématiciens ont dès l'Antiquité trouvé une méthode pour construire des édifices solides : c'est de faire en sorte que leur architecture soit correctement constituée.

Cette méthode n'apporte toutefois pas de garantie. Une théorie mathématique correctement constituée peut être inconsistante. L'exigence de minimalité – qui date elle aussi de l'Antiquité, comme le montrent les *Éléments* d'Euclide – lui vient en appui, mais elle non plus n'apporte aucune certitude.

Il a fallu attendre le dix-neuvième siècle pour que soient découvertes des techniques garantissant la solidité logique d'une théorie.

Pour prouver la consistance d'une théorie, il faut être intellectuellement autorisé à considérer l'ensemble des théorèmes qu'elle permet de produire, afin de vérifier qu'on n'y trouve pas à la fois un théorème et son contraire. Il faut donc disposer du concept d'ensemble et de ses règles de fonctionnement : la réunion, l'intersection, etc. – c'est-à-dire disposer de la théorie des ensembles.

Quand la théorie dont on veut prouver la consistance est précisément la théorie des ensembles, le serpent se mord la queue. La preuve est congénitalement impossible à fournir.

Or la théorie des ensembles jouit d'un statut spécial en mathématiques : d'une part elle fait partie des pré-requis nécessaires à leur construction, d'autre part elle permet de les construire tout entières en son sein. Elle est le minimum nécessaire et suffisant à leur engendrement. Par conséquent, l'impossibilité de prouver la consistance de la théorie des ensembles implique celle de prouver la consistance des mathématiques.

Certains mathématiciens vivent peut-être dans l'angoisse qu'on finisse par trouver une contradiction dans les mathématiques, qui les ruinerait d'un coup tout entières. Mais ils sont extrêmement rares. La théorie des ensembles ne fait que tirer au clair, poser noir sur blanc, des concepts et des règles qui sont consubstantiels à la possibilité de penser : mettre « ensemble » dans des classes logiques, pouvoir manipuler ces classes en utilisant le « et » et le « ou », les combiner par produit cartésien, en extraire des sous-classes par sélection logique, etc. Si elle devait un jour s'effondrer d'inconsistance, ce serait la possibilité même de penser qui s'effondrerait. Et nous n'en reviendrions pas, d'avoir pu penser aussi loin que nous l'avons fait, et d'en avoir tiré tant de choses, alors que c'est une activité qui ne rime définitivement à rien. Si nous croyons un tant soit peu à la possibilité de penser, nous devons croire à la solidité logique de la théorie des ensembles.

Une fois posé ce cadre, et donc celui des mathématiques en général, une méthode existe pour se prémunir de l'inconsistance. Elle a été employée dès 1868 par Beltrami à propos de la question jusqu'à ouverte de savoir si on ne finirait pas par découvrir une contradiction dans les nouvelles géométries non-euclidiennes qui venaient d'être développées. Beltrami a montré que la surface appelée pseudo-sphère, dont on considère les géodésiques comme étant des droites, constitue un modèle localement parfait de la géométrie de Lobatchevski. Par la suite, d'autres modèles ont été donnés par Poincaré et Beltrami. Puisqu'on peut construire dans le cadre de la géométrie euclidienne des modèles de la géométrie de Lobatchevski, si la seconde devait s'écrouler sous le coup d'une contradiction, il en serait de même de la première. Comme la géométrie euclidienne peut à son tour être modélisée dans un espace affine euclidien, l'une et l'autre géométrie sont aussi solides que l'algèbre linéaire. Comme cette dernière est constructible dans le cadre de la théorie des ensembles, nous savons que les deux géométries sont aussi solides que la théorie des ensembles.

Une axiomatisation de la physique ne peut avoir une exigence moindre : la consistance d'une théorie doit être montrée par la construction d'un modèle à l'intérieur de l'édifice mathématique actuel, c'est-à-dire, indirectement, à l'intérieur de la théorie des ensembles.

.....

## 10 – L'EXIGENCE DE PERTINENCE

Les géométries d'Euclide, de Lobatchevski, de Riemann, sont des théories axiomatisées qui ont toutes le même niveau de consistance, celui des mathématiques en général. Comme elles diffèrent les unes des autres, une seule au plus peut être adéquate au réel, en un mot, **pertinente**.

Nous exigeons donc d'une théorie qu'elle soit pertinente : que les expériences qu'elle modélise aient des résultats conformes à l'expérience.

Cela la rend <b>réfutable</b> , au sens que Popper donne à ce mot.
--

La pertinence et la consistance sont deux exigences bien séparées. La géométrie euclidienne de dimension dix-sept, par exemple, ne soulève en elle-même aucune difficulté logique : elle est consistante. Mais parce que par un point donné de l'espace géométrique où nous vivons on peut faire passer exactement trois droites perpendiculaires deux à deux, et pas dix-sept, elle n'est pas pertinente.

À l'inverse, une théorie inconsistante peut donner toutes les apparences d'être pertinente – du moins pendant un certain temps. C'est le cas d'une géométrie dans laquelle on postulerait, comme les Grecs à une certaine époque, que tous les nombres sont rationnels. Comme il n'y a, pour les mesures géométriques, strictement aucune différence entre un rationnel et un irrationnel, cette théorie peut rester longtemps conforme à l'expérience. Elle est néanmoins inconsistante parce qu'elle prévoit que la longueur de la diagonale d'un carré de côté unité, soit  $\sqrt{2}$ , est un nombre rationnel, d'où l'on déduit, par un raisonnement simple connu depuis l'Antiquité, qu'il existe un entier à la fois pair et impair.

Une fois survenue cette catastrophe – dont on dit que le Grec qui la découvrit fut mis à mort – la géométrie perd brutalement toute pertinence. En effet, en considérant le reste dans la division par 2 de cet entier à la fois pair et impair, on montre que  $0 = 1$ . Il en découle que tous les nombres sont égaux, puis que toutes les distances sont égales, puis que tous les points sont confondus.

.....

## 10 – RÉCAPITULATION

La construction rigoureuse des notions spatiotemporelles doit obéir à six exigences.

1) **Fondation sur l'instrument et l'expérience.** Le modèle d'une réalité physique naïve, qui « existerait » en toute indépendance des moyens de l'atteindre, doit être récusé. La modélisation doit porter non sur un espace et un temps traités comme existant « en eux-mêmes », extérieurs à tout recours expérimental, mais intégrer les instruments et les expériences par lesquels nous construisons ces notions à partir du dénuement primitif de l' « homme préhistorique ».

2) **Bonne architecture mathématique.** La cinématique doit être une théorie mathématique correctement construite, autrement dit axiomatisée. Tous ses objets premiers doivent être explicités, ainsi que ses axiomes.

3) **Universalité.** Le premier cadre à axiomatiser est le cadre galiléen parfait, celui du désert intersidéral. C'est lui qui nous fournira la référence relativement à laquelle pourront être décrits les cadres non galiléens.

4) **Minimalité.** La liste des objets premiers doit être aussi minimale que possible, de même que celle des axiomes.

5) **Solidité logique.** La consistance logique de la théorie doit être prouvée par la construction d'un modèle de la théorie à l'intérieur des mathématiques, autrement dit, de façon indirecte, à l'intérieur de la théorie des ensembles.

6) **Pertinence.** La théorie doit offrir une description précise et exacte du réel.

Dans des articles faisant suite à celui-ci, nous nous attacherons à déterminer quels sont les instruments et les expériences nécessaires et minimaux permettant de construire, dans le contexte du dénuement primitif, une cinématique du cadre plat répondant à nos exigences.

Nous examinerons également sur quels points la construction einsteinienne de la cinématique du cadre plat – autrement dit de la relativité restreinte – est conforme à ces exigences, et sur quels points elle ne l'est pas.

.....

# Table des matières

1 – L’IMMERSION DANS LA PEAU D’UN HOMME PRÉHISTORIQUE.....	2
2 – LE MODÈLE RÉEL / THÉORIE .....	2
3 – LE RAPPORT AU RÉEL .....	3
4 – L’EXIGENCE DE FONDATION SUR L’INSTRUMENT ET L’EXPÉRIENCE.....	5
5 – L’EXIGENCE DE BONNE ARCHITECTURE MATHÉMATIQUE .....	7
6 – ÉLARGISSEMENT DU PROBLÈME : LE SIXIÈME PROBLÈME DE HILBERT .....	9
7 – L’EXIGENCE D’UNIVERSALITÉ .....	13
8 – L’EXIGENCE DE MINIMALITÉ.....	14
9 – L’EXIGENCE DE SOLIDITÉ LOGIQUE .....	16
10 – L’EXIGENCE DE PERTINENCE .....	18
10 – RÉCAPITULATION.....	19